

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

# **MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA KUNTZMANN BERDASARKAN RATA-RATA PANGKAT $p = \frac{1}{2}$**

## **TUGAS AKHIR**

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains  
pada Program Studi Matematika

oleh:

**ANDIKA RISKI**  
**11654101139**



**UIN SUSKA RIAU**  
**UIN SUSKA RIAU**

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGRi SULTAN SYARIF KASIM RIAU  
PEKANBARU  
2019**



**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumunkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## LEMBAR PERSETUJUAN

### MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA KUNTZMANN BERDASARKAN RATA-RATA PANGKAT $p = \frac{1}{2}$

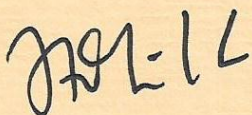
#### TUGAS AKHIR

oleh:

**ANDIKA RISKI**  
**11654101139**

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan Tugas Akhir  
di Pekanbaru, pada tanggal 19 Desember 2019

**Ketua Program Studi**



**Ari Pani Desvina, M.Sc.**  
**NIP. 19811225 200604 2 003**

**Pembimbing**



**Wartono, M.Sc.**  
**NIP. 19730818 200604 1 003**



**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## LEMBAR PENGESAHAN

### MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA KUNTZMANN BERDASARKAN RATA-RATA PANGKAT $p = \frac{1}{2}$

#### TUGAS AKHIR

oleh:

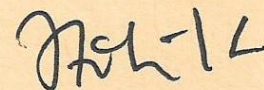
**ANDIKA RISKI**  
**11654101139**

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji  
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains  
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau  
di Pekanbaru, pada tanggal 19 Desember 2019

Pekanbaru, 19 Desember 2019

Mengesahkan,

**Ketua Program Studi**



**Ari Pani Desvina, M.Sc.**  
**NIP. 19811225 200604 2 003**



**Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag.**  
**NIP. 19660604 199203 1 004**

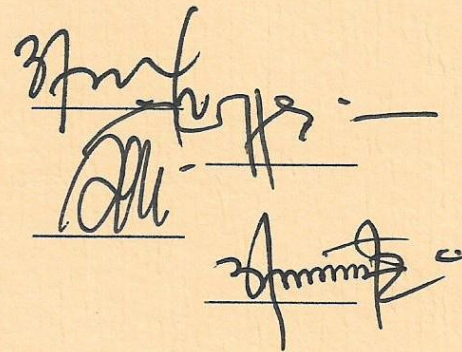
#### DEWAN PENGUJI

**Ketua : Fitri Aryani, M.Sc.**

**Sekretaris : Wartono, M.Sc.**

**Anggota I : Dr. Yuslenita Muda, M.Sc.**

**Anggota II : Irma Suryani, M.Sc.**





## LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebut sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh tugas akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjam tugas akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam tugas akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan di dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 19 Desember 2019

Yang membuat pernyataan,

**ANDIKA RISKI**  
**NIM. 11654101139**

UIN SUSKA RIAU

### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## LEMBAR PERSEMBAHAN



"Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman diantaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat"

∞(QS. Al-Mujadalah:11)∞

*Alhamdulillahirrabil'alamin*

*Langkah demi langkah telah usai aku lalui. Satu persatu satu cita-citaku telah ku capai.*

*Namun.... Itu belum akhir dari perjalanan, melainkan awal dari perjuangan.*

*Aku merasa cukup bukan karena aku sudah memiliki segalanya, tapi itu karena aku bisa mensyukuri dan menikmati apa yang aku punya.*

**\*\*\*Sujud syukurku, kupersembahkan kepada Allah SWT\*\*\***

*Pemberi maaf yang tak pernah bosan, pemberi limpahan kasih sayang yang tak pernah mengeluh. Terima kasih atas berkah yang telah Engkau berikan kepadaku.*

**Sebuah karya kecil ini ku persembahkan untuk**

**\*\*\*Ayahanda Jasman dan Ibundaku Herma Yuniati\*\*\***

*Mungkin ucapan terima kasihku tak cukup untuk membalas semua kasih sayangmu kepadaku, namun hanya itu yang dapat aku lanturkan untuk membalas semua pengorbanan dan do'a kalian kepadaku.*

*Terima kasih Ayah, Terima kasih Ibu...*

**\*\*\*Abangku Ito Hermanto, Firman Syarief, dan Kakakku Nurlaili Jasman\*\*\***

*Terima kasih telah menjadi panutan yang memberikan ku motivasi untuk terus berjuang demi membahagiakan kedua orang tua kita.*

**\*\*\*Dosen Pembimbingku Bapak Wartono, M.Sc dan Dosen-Dosen Program Studi**

**Matematika Fakultas Sains dan Teknologi\*\*\***

*Terima kasih atas waktu dan tenaga kalian untuk membimbing saya dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.*

**\*\*\*Sahabat-Sahabatku\*\*\***

*Terima kasih untuk sahabat-sahabatku yang telah menemaniku, menasehatiku, dan memberikan pengalaman yang luar biasa selama aku berada di kampus ini.*

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

# MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA KUNTZMANN BERDASARKAN RATA-RATA PANGKAT $p = \frac{1}{2}$

**ANDIKA RISKI**

**11654101139**

Tanggal Sidang : 19 Desember 2019

Tanggal Wisuda : 2020

Program Studi Matematika  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau  
Jl. Soebrantas KM 15 No. 155 Pekanbaru

## **ABSTRAK**

Metode Runge-Kutta Kuntzmann (RKKu) merupakan salah satu metode numerik yang di gunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu. Penelitian ini membahas modifikasi metode RKKu berdasarkan rata-rata pangkat  $p = 1/2$  untuk mendapatkan galat yang lebih kecil dan menambah varian dari metode RKKu. Modifikasi dari metode ini dilakukan dengan mengganti bentuk rata-rata aritmatik pada metode RKKu dengan bentuk rata-rata pangkat  $p = 1/2$ . Berdasarkan hasil penelitian didapatkan rumusan modifikasi (RKKuP), galat, serta daerah kestabilan dari metode RKKuP. Untuk menguji galat dari metode RKKuP, maka dilakukan simulasi numerik dengan memberikan dua contoh, berdasarkan simulasi numerik yang membandingkan galat atau *error* dari hasil modifikasi (RKKuP) dengan metode RKKu, RKKu berdasarkan rata-rata kontra harmonik dan RKKu berdasarkan rata-rata harmonik, untuk contoh soal  $y' = 1/y$ , metode RKKuP memiliki galat yang lebih kecil dibandingkan metode lainnya.

**Kata kunci:** Deret Taylor, Rata-Rata Pangkat, Kestabilan, Metode Runge-Kutta Kuntzmann, Persamaan Diferensial.



**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

# **MODIFICATION OF THE KUNTZMANN RUNGE-KUTTA METHOD BASED ON POWER MEANS $p = \frac{1}{2}$**

**ANDIKA RISKI**

**11654101139**

*Date of Final Exam : 19<sup>th</sup> December 2019*

*Date of Graduation : 2020*

*Mathematics Department  
Faculty of Science and Technology  
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau  
Soebrantas Street No. 155 Pekanbaru*

## **ABSTRACT**

*The Kuntzmann Runge-Kutta method (RKKu) is a numerical method for solving first order differential equations. In here, we modified the RKKu Method based on Power mean  $p = 1/2$  in order to get smaller errors and make new variants of RKKu method. Modification of this method is done by replacing the arithmetic mean form in the RKKu method with power mean  $p = 1/2$ . Based on the research result we obtained the modified formula (RKKuP), errors, and the stability of the RKKuP method. To test errors from the RKKuP method, a numerical simulation is carried out by giving two examples, based on numerical simulation comparing errors from the modified results (RKKuP) with the RKKu method, RKKu based on harmonic counter mean and RKKu based on harmonic mean. Based on the simulation results, for the problem  $y' = 1/y$ , the RKKuP method has a smaller error of the to other methods.*

**Keywords:** *Taylor's Series, Power Means, Stability, Kuntzmann Runge-Kutta Method, Differential Equation.*



## KATA PENGANTAR

*Alhamdulillahirabbil'alamiin.* Puji syukur penulis ucapkan kepada Allah *Subhanahu Wa Ta'ala* karena atas rahmat, karunia, nikmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul **“Modifikasi Metode Runge-Kutta Kuntzmann Berdasarkan Rata-Rata Pangkat  $p = 1/2$ ”**.

Shalawat beserta salam juga selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad *Shalallahu 'Alahi Wasallam*, semoga kita semua mendapat *syafaat*-nya. Penulisan tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Dalam penyusunan tugas akhir ini penulis banyak sekali mendapatkan bimbingan, arahan, dan masukan dari berbagai pihak. Penulis mengucapkan terima kasih khususnya kepada kedua orang tua tercinta Ayahanda Jasman, Ibunda Herma Yuniati, Kakanda Ito, Firman, dan Ayunda Leli yang selalu mendo'akan dan melimpahkan kasih sayang kepada penulis. Selain itu, penulis juga mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Akhmad Mujahidin, S.Ag, M.Ag., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc., selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
5. Bapak Wartono, M.Sc., selaku Pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan arahan, penjelasan serta petunjuk kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
6. Ibu Dr. Yuslenita Muda, M.Sc., selaku Penguji I yang telah banyak memberikan masukan, saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.

### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

7. Ibu Irma Suryani, M.Sc., selaku Penguji II yang telah banyak memberikan masukan, saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.
8. Bapak dan Ibu Dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
9. Sahabat-sahabat penulis Mardiah Munthe, Meli Ermanita, Resti Molina, Sri Utami Wahyuni Zain, terima kasih atas bantuan, masukan dan segala dukungan yang telah diberikan kepada penulis.
10. Sigma Entertainment, Neofattah, BMT 16, Sinta, Putri, dan Ratih atas partisipasinya dalam membantu penyelesaian tugas akhir penulis.
11. Teman-teman seperjuangan di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi khususnya angkatan 2016 yang telah banyak memberikan bantuan, masukan serta dukungan.
12. Semua pihak yang telah memberi bantuan dari awal penyusunan tugas akhir hingga selesai, yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tugas akhir ini masih terdapat kesalahan dan kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini. Semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi kita semua. *Aamiin ya Rabbal'alamiin.*

Pekanbaru, 19 Desember 2019

Andika Riski

UIN SUSKA RIAU



**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>LEMBAR PERSETUJUAN .....</b>	ii
<b>LEMBAR PENGESAHAN .....</b>	iii
<b>LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL .....</b>	iv
<b>LEMBAR PERNYATAAN .....</b>	v
<b>LEMBAR PERSEMBAHAN .....</b>	vi
<b>ABSTRAK .....</b>	vii
<b>ABSTRACT.....</b>	viii
<b>KATA PENGANTAR .....</b>	ix
<b>DAFTAR ISI .....</b>	xi
<b>DAFTAR GAMBAR.....</b>	xiii
<b>DAFTAR TABEL .....</b>	xiv
<b>DAFTAR SIMBOL.....</b>	xv
<b>DAFTAR LAMPIRAN .....</b>	xvi
<b>DAFTAR SINGKATAN.....</b>	xvii
 <b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	I-1
1.2 Rumusan Masalah.....	I-2
1.3 Batasan Masalah .....	I-2
1.4 Tujuan Penelitian .....	I-2
1.5 Manfaat Penelitian .....	I-3
1.6 Sistematika Penulisan .....	I-3
 <b>BAB II LANDASAN TEORI</b>	
2.1 Persamaan Differensial Biasa Orde Satu .....	II-1
2.2 Deret Taylor .....	II-2
2.3 Metode Runge-Kutta Orde Empat .....	II-5
2.4 Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann .....	II-8
2.5 Galat Pemotongan.....	II-9

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

2.6	Kestabilan Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann	II-10
2.7	Rata-Rata Pangkat .....	II-11
2.8	Deret Binomial.....	II-12

**BAB III METODOLOGI PENELITIAN**

**BAB IV PEMBAHASAN**

4.1	Modifikasi Metode Runge-Kutta Kuntzmann Berdasar- kan Rata-Rata Pangkat $p = 1/2$ .....	IV-1
4.2	Galat Metode Runge-Kutta Kuntzmann Berdasarkan Rata-Rata Pangkat $p = 1/2$ .....	IV-7
4.3	Kestabilan Metode Runge-Kutta Kuntzmann Berdasar- kan Rata-Rata Pangkat $p = 1/2$ .....	IV-8
4.4	Simulasi Numerik .....	IV-10

**BAB V PENUTUP**

5.1	Kesimpulan .....	V-1
5.2	Saran .....	V-2

**DAFTAR PUSTAKA**

**LAMPIRAN**

**DAFTAR RIWAYAT HIDUP**



**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## DAFTAR GAMBAR

Gambar		Halaman
2.1	Daerah Kestabilan Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann.....	II-11
4.1	Daerah Kestabilan Hasil Modifikasi RKKuP Sampai Orde Lima .....	IV-9
4.2	Perbandingan Daerah Kestabilan RKKuP dan Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann .....	IV-9
4.3	Grafik Perbandingan Galat RKKu, RKKuCoH, RKKuH dan RKKuP Untuk Persamaan Diferensial $y = y'$ .....	IV-11
4.4	Grafik Perbandingan Galat RKKuP, RKKu, RKKuCoH dan RKKuH Untuk Persamaan Diferensial $y = 1/y$ .....	IV-13

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## DAFTAR TABEL

Tabel		Halaman
2.1	Tabel Butcher Runge-Kutta Orde- $n$ .....	II-5
2.2	Tabel Butcher Runge-Kutta Orde Empat .....	II-6
2.3	Tabel Butcher Runge-Kutta Orde-4 Kuntzmann .....	II-8
4.1	Solusi Eksak, Solusi Numerik, dan Galat Dari Metode RKKuP Untuk Persamaan Diferensial $y' = y$ .....	IV-10
4.2	Perbandingan Galat Metode RKKu, RKKuCoH, RKKuH dan RKKuP Untuk Persamaan Diferensial $y' = y$ .....	IV-11
4.3	Solusi Eksak, Solusi Numerik, dan Galat Dari Metode RKKuP Untuk Persamaan Diferensial $y' = 1/y$ .....	IV-12
4.4	Perbandingan Galat Metode RKKu, RKKuCoH, RKKuH dan RKKuP Untuk Persamaan Diferensial $y' = 1/y$ .....	IV-13



## DAFTAR SIMBOL

$x_0$	: Nilai awal
$f(x)$	: Fungsi dengan variabel bebas $x$
$f'$	: Turunan pertama fungsi $f$
$f''$	: Turunan kedua fungsi $f$
$f^{(n)}$	: Turunan ke- $n$ fungsi $f$
$R_n(x)$	: Suku sisa deret Taylor
$\lambda$	: Koefisien
$!$	: Faktorial

### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Halaman
A. Nilai Parameter Metode RKKuP .....	A-1
B. Galat Metode RKKuP .....	B-1
C. Kestabilan Metode RKKuP .....	C-1
D. Tabel Penyelesaian Eksak, Numerik dan Galat untuk $y' = y$ Menggunakan Metode RKKu, RKKuCoH, RKKuH dan RKKuP .....	D-1
E. Tabel Penyelesaian Eksak, Numerik dan Galat untuk $y' = 1/y$ Menggunakan Metode RKKu, RKKuCoH, RKKuH, dan RKKuP .....	E-1

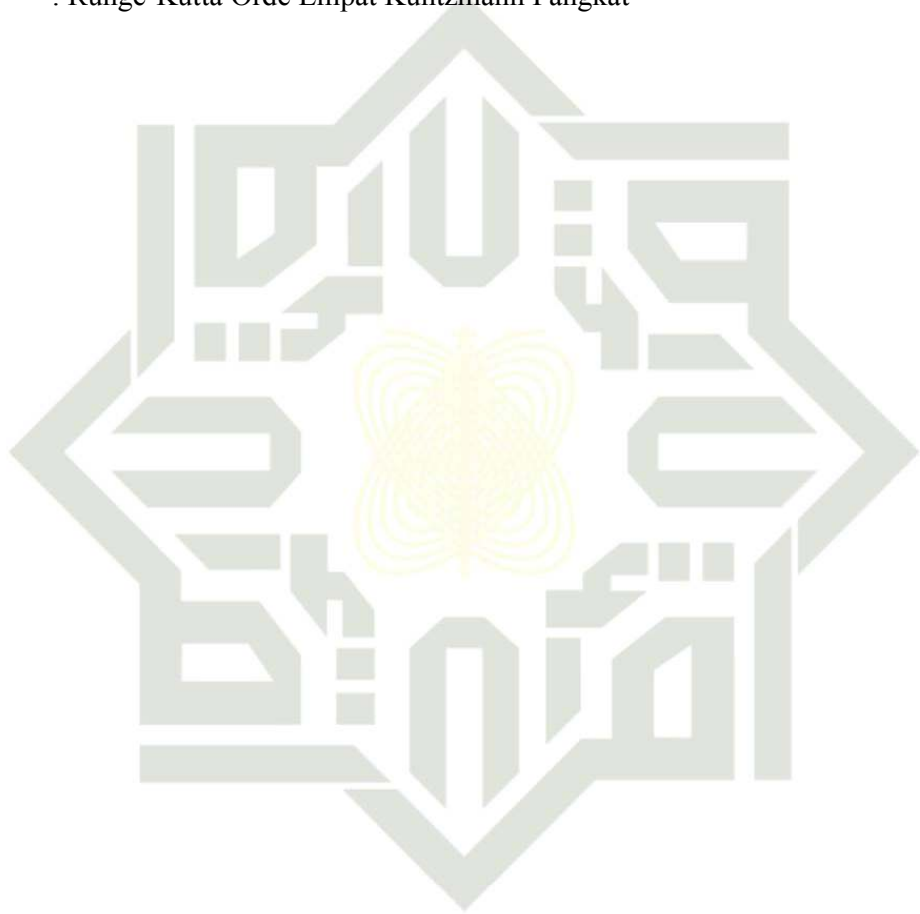
UIN SUSKA RIAU

### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## DAFTAR SINGKATAN

RKKu	: Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann
RKKuCoH	: Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann Kontra Harmonik
RKKuH	: Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann Harmonik
RKKuP	: Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann Pangkat



UIN SUSKA RIAU

### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial biasa orde satu dapat berbentuk persamaan diferensial biasa orde satu linear dan persamaan diferensial biasa orde satu non linear. Beberapa Persamaan diferensial biasa orde satu non linear yang rumit tidak bisa diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu, sebagai alternatif penyelesaian digunakan perhitungan secara numerik.

Salah satu penyelesaian numerik yang sering digunakan untuk persamaan diferensial biasa orde satu adalah metode Runge-Kutta orde empat. Metode Runge-Kutta orde empat sering digunakan untuk penyelesaian persamaan diferensial orde satu karena metode tersebut tidak membutuhkan perhitungan turunan. Selain itu metode Runge-Kutta orde empat memiliki nilai kesalahan (*error*) yang relatif kecil dibandingkan dengan metode Euler, Heun dan metode Runge-Kutta orde tiga.

Metode Runge-Kutta orde empat memiliki banyak bentuk berdasarkan pengambilan parameter bebasnya, diantaranya: Runge-Kutta orde empat Klasik, Runge-Kutta orde empat Kutta, Runge-Kutta orde empat Gill dan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann (Lapidus,1971).

Beberapa peneliti telah melakukan modifikasi metode Runge-Kutta orde empat. untuk memperkecil error sehingga nilai hampirannya lebih mendekati nilai eksak (Sanugi dan Evans ,1994) memodifikasi metode Runge-Kutta orde empat klasik berdasarkan rata-rata harmonik yang menghasilkan persamaan yang lebih baik daripada Runge-Kutta orde empat klasik untuk simulasi yang mereka lakukan. (Evans dan Yaakub,1995) juga memodifikasi metode Runge-Kutta orde empat klasik menggunakan rata-rata kontra harmonik yang menghasilkan metode yang tiga kali lebih baik daripada metode Runge-Kutta orde empat klasik. (Murugesan dkk,2002) mengkombinasikan antara rata-rata aritmatik dan centroidal dan mendapatkan galat yang relatif lebih kecil. (Muda dan Sarah, 2019) memodifikasi Metode Runge-Kutta orde empat klasik menggunakan rata-rata pangkat dan menghasilkan metode yang lebih baik untuk beberapa contoh kasus.

#### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Persamaan rata-rata pangkat diperkenalkan dalam penelitian (Cizmesija, 2012) yang mengkaji ulang rata-rata pangkat untuk dua konvex kombinasi dari deret aritmatik, harmonik dan geometri. Persamaan rata-rata pangkat yaitu:

$$M_p(a, b) = \begin{cases} (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}} & , p \neq 0 \\ \sqrt{ab} & , p = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

dengan  $a, b, p \in R$  dan  $a, b > 0$ .

Selain Runge-Kutta orde empat klasik, beberapa peneliti juga ada yang memodifikasi Runge-Kutta orde empat Kuntzmann diantaranya : Modifikasi Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata harmonik (Mirna, 2013), Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata geometri (Yuliarni, 2013), Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata kontra harmonik (Nasution, 2013), penelitian tersebut semuanya mendapatkan hasil yang lebih baik untuk contoh kasus tertentu.

Berdasarkan tinjauan literatur tersebut, penulis tertarik untuk mengaplikasikan rata-rata pangkat untuk memodifikasi metode runge-kutta orde empat Kuntzmann, dengan judul **“Modifikasi Metode Runge-Kutta Kuntzmann Berdasarkan Rata-Rata Pangkat  $p = \frac{1}{2}$ ”**.

### 1.2 Rumusan Masalah

Perumusan masalah pada tugas akhir ini adalah bagaimana menentukan rumusan baru, galat, kestabilan, serta melakukan simulasi numerik Modifikasi Metode Runge-Kutta Kuntzmann Berdasarkan Rata-Rata Pangkat  $p = 1/2$ .

### 1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada tugas akhir ini yaitu hanya menggunakan metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann, rata-rata pangkat  $p = 1/2$ , dan persamaan diferensial biasa orde satu.

### 1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

- a. Mendapatkan rumusan modifikasi Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata pangkat  $p = 1/2$ .

#### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

- b. Menentukan galat dan kestabilan pada metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata pangkat  $p = 1/2$ .
- c. Melakukan simulasi numerik.

### 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

- a. Menambah kemampuan penulis dan pembaca untuk mengembangkan bentuk metode numerik untuk penyelesaian permasalahan matematika khususnya persamaan diferensial orde satu.
- b. Hasil penelitian dapat digunakan untuk menentukan solusi dari persamaan diferensial orde satu, dan dapat dijadikan bahan untuk mengembangkan metode lainnya.

### 1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini mencakup lima bab, yaitu:

#### BAB I Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

#### BAB II Landasan Teori

Bab ini berisikan teori-teori yang akan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam tugas akhir ini.

#### BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisi langkah langkah yang akan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam tugas akhir ini.

#### BAB IV Hasil dan Pembahasan

Bab ini berisi tentang pembahasan dari hasil penelitian.

#### BAB V Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dan saran.



**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## BAB II

### LANDASAN TEORI

Landasan teori dalam penelitian ini memuat penjelasan dasar teori yang mendukung penyelesaian tugas akhir, diantaranya yaitu: Persamaan diferensial orde satu, deret Taylor, Runge-Kutta orde empat Kuntzmann, galat pemotongan dan kestabilan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann, rata-rata pangkat dan deret binomial.

#### 2.1 Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu

Persamaan diferensial Biasa orde satu dibahas pada landasan teori ini karena hasil modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde satu.

**Definisi 2.1** (Xie, 2010) Suatu Persamaan diferensial disebut sebagai suatu persamaan diferensial biasa orde satu adalah Persamaan yang mengandung turunan biasa, yaitu turunan dengan satu variabel bebas. Bentuk baku Persamaan diferensial biasa orde satu dengan nilai awal ditulis sebagai berikut:

$$y' = f(x, y). \quad (2.1)$$

dengan nilai awal  $y(x_0) = y_0$ .

Persamaan diferensial biasa orde satu yang tidak mengikuti bentuk baku tersebut harus ditulis ulang menjadi bentuk Persamaan (2.1) agar dapat diselesaikan secara numerik.

**Contoh 2.1** Selesaikanlah masalah nilai awal berikut:

$$y' = (3 - x)y, \quad y(0) = 1.$$

#### Penyelesaian :

Untuk menentukan penyelesaian dari masalah nilai awal tersebut dapat dilakukan dengan menggunakan metode analitik, salah satunya yaitu metode pemisahan variabel.

Persamaan  $y'$  dapat ditulis kembali menjadi:

$$\frac{dy}{dx} = (3 - x)y.$$

Kemudian pisahkan berdasarkan variabelnya sehingga diperoleh:

#### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\frac{1}{y} dy = (3 - x) dx.$$

Integralkan kedua ruas menjadi:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int (3 - x) dx.$$

Diperoleh hasil pengintegralan yaitu:

$$\ln y = 3x + \frac{1}{2}x^2 + C,$$

atau

$$y = \exp\left(3x + \frac{1}{2}x^2 + C\right),$$

$$= e^{3x + \frac{1}{2}x^2} e^C.$$

oleh karena  $y(0) = 1$ , maka:

$$e^0 e^C = 1,$$

atau

$$C = 0.$$

Sehingga diperoleh solusi khusus yaitu:

$$y = e^{3x + \frac{1}{2}x^2}.$$

Menyelesaikan persamaan diferensial biasa secara numerik yaitu menghitung nilai fungsi di  $x_{i+1} = x_i + h$ , dengan  $h$  merupakan ukuran langkah setiap iterasi. Pada metode analitik, nilai awal gunanya untuk memperoleh solusi yang unik, sedangkan pada metode numerik nilai awal gunanya untuk memulai iterasi. Terdapat beberapa metode numerik yang sering digunakan untuk menghitung solusi PDB, mulai dari metode yang paling dasar sampai dengan metode yang lebih teliti, yaitu:

1. Metode Euler,
2. Metode Heun,
3. Metode Deret Taylor,
4. Metode Runge-Kutta.

#### 2.2 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan bentuk dari fungsi matematika sebagai jumlahan tak hingga dari suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut pada

### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

suatu titik. Salah satu fungsi deret Taylor adalah memberikan solusi hampiran dari suatu fungsi  $f(x)$  dalam bentuk polinomial, sehingga nilai penyelesaian pada suatu fungsi dapat diperoleh pendekatannya. Penjelasan matematis dapat dilihat pada teorema berikut:

**Teorema 2.1 (Purcell, 2008)** : Diberikan  $f$  adalah fungsi kontinu dimana turunan ke- $(n + 1)$ , nya ada untuk setiap  $x$  pada selang terbuka  $I$  yang mengandung  $a$ . Maka untuk setiap  $x \in I$ .

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + R_n(x), \quad (2.2)$$

dengan sisa (atau galat)  $R_n(x)$  diberikan oleh rumus:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{(n+1)}, x < \xi < a. \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) merupakan sisa dari deret Taylor. Oleh karena itu, jika  $P_n(x)$  adalah polinomial deret Taylor, maka:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)(x - a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x - a)^3}{3!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x - a)^n}{n!} \quad (2.4)$$

Persamaan (2.2) dapat ditulis kembali dalam bentuk:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Teorema deret Taylor telah dibuktikan pada buku Purcell, 2008 halaman 107.

Persamaan diferensial biasa orde satu dapat diselesaikan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y), \\ y' &= f(x, y). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Oleh karena itu bentuk turunan persamaan diferensial berikutnya yaitu:

$$\begin{aligned} y'' &= f'(x, y), \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f, \end{aligned} \quad (2.6)$$



**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\begin{aligned}
 &= f_x + f f_y. \\
 y''' &= f''(x, y), \\
 &= \frac{\partial}{\partial x}(f_x + f f_y) + \frac{\partial f}{\partial y}(f_x + f f_y) \frac{dy}{dx}, \\
 &= \frac{\partial}{\partial x}(f_x + f f_y) + \frac{\partial f}{\partial y}(f_x + f f_y)f, \\
 &= f_{xx} + f_x f_y + f_{yx}f + f_{xy}f + f(f_y f_y + f f_{yy}), \\
 &= f_{xx} + f_x f_y + 2f f_{xy} + f f_y^2 + f_{yy}f^2.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
 y^{(4)} &= f'''(x, y), \\
 &= \frac{\partial}{\partial x}(f_{xx} + f_x f_y + 2f f_{xy} + f f_y^2 + f_{yy}f^2) + \frac{\partial}{\partial y}f(f_{xx} + f_x f_y + \\
 &\quad 2f f_{xy} + f f_y^2 + f_{yy}f^2) \frac{dy}{dx}, \\
 &= \frac{\partial}{\partial x}(f_{xx} + f_x f_y + 2f f_{xy} + f f_y^2 + f_{yy}f^2) + \frac{\partial f}{\partial y}(f_{xx} + f_x f_y + \\
 &\quad 2f f_{xy} + f f_y^2 + f_{yy}f^2)f, \\
 &= f_{xxx} + f_{xx}f_y + f_x f_{xy} + 2f_x f_{xy} + 2f f_{xxy} + f_x f_y^2 + f f_{xy}f_y + \\
 &\quad f f_y f_{xy} + f f_x f_{yy} + f_x f f_{yy} + f^2 f_{xyy} + f(f_{xxy} + f_{xy}f_y + f_x f_{yy} \\
 &\quad + 2f_y f_{xy} + 2f f_{xyy} + f_y f_y^2 + f_{yyy}f^2), \\
 &= f_{xxx} + 3f f_{xxy} + 3f_x f_{xy} + 5f f_y f_{xy} + 3f^2 f_{xyy} + 4f^2 f_y f_{yy} + \\
 &\quad 3f f_x f_{yy} + f^3 f_{yyy} + f_{xx}f_y + f_x f_y^2 + f f_y^3.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Selanjutnya, ekspansi  $y_{i+1}$  menggunakan deret Taylor disekitar  $y_i$  yang ditulis dalam bentuk:

$$y_{i+1} = y_i + h y' + \frac{h^2 y''}{2!} + \frac{h^3 y'''}{3!} + \frac{h^4 y^{(4)}}{4!} + \dots \tag{2.9}$$

Jika Persamaan (2.5), (2.6), (2.7), dan (2.8) di substitusikan ke Persamaan (2.9) maka didapat persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} &= y_i + h f + \frac{h^2}{2!}(f_x + f f_y) + \frac{h^3}{3!}(f_{xx} + f_x f_y + 2f f_{xy} + f f_y^2 + \\
 &\quad f_{yy}f^2) + \frac{h^4}{4!}(f_{xxx} + 3f f_{xxy} + 3f_x f_{xy} + 5f f_y f_{xy} + 3f^2 f_{xyy} + \\
 &\quad 3f f_x f_{yy} + 4f^2 f_y f_{yy} + f^3 f_{yyy} + f_{xx}f_y + f_x f_y^2 + f f_y^3) + \dots
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

dengan hanya mengambil turunan terhadap  $y$  maka Persamaan (2.10) dapat ditulis menjadi:

$$y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2!} f f_y + \frac{h^3}{3!} (f f_y^2 + f_{yy} f^2) + \frac{h^4}{4!} (f^3 f_{yyy} + 4f^2 f_y f_{yy} + f f_y^3) + O(h^5). \quad (2.11)$$

### 2.3 Metode Runge-Kutta Orde Empat

Metode Runge-Kutta adalah alternatif lain dari metode deret Taylor yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi, dan sekaligus menghindarkan penggunaan turunan yang lebih tinggi dengan jalan mengevaluasi fungsi  $f(x, y)$ .

Bentuk umum metode Runge-Kutta orde- $n$  adalah sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + h(a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n), \quad (2.12)$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i), \\ k_2 &= f(x_i + p_1 h, y_i + h q_{11} k_1), \\ k_3 &= f(x_i + p_2 h, y_i + h(q_{21} k_1 + q_{22} k_2)), \\ &\vdots \\ k_n &= f(x_i + p_{n-1} h, y_i + h(q_{n-1,1} k_1 + q_{n-1,2} k_2 + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1})). \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa terdapat parameter-parameter  $a_1, \dots, a_n$  dan  $p_1, \dots, p_n, q_{21}, \dots, q_{n-1,1}, q_{32}, \dots, q_{n(n-1)}$  pada Persamaan (2.12) yang harus ditentukan. Bentuk umum Metode Runge-Kutta tersebut dapat ditunjukkan dalam suatu tabel yang dikenal sebagai tabel Butcher. Tabel Butcher bentuk umum metode Runge-Kutta digambarkan sebagai berikut:

**Tabel 2.1 Tabel Butcher Runge-Kutta Orde- $n$**

0	0	0	...	0	0
$p_1$	$q_{11}$	0	...	0	0
$p_2$	$q_{21}$	$q_{22}$	...	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$p_{n-1}$	$q_{n-1,1}$	$q_{n-1,2}$	...	$q_{n-1,n-1}$	0
	$a_1$	$a_2$	...	$a_{n-1}$	$a_n$

### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Misalkan di ambil  $n = 4$  maka diperoleh bentuk umum metode Runge-Kutta orde empat yaitu:

$$y_{i+1} = y_i + h(a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4), \quad (2.13)$$

dengan

$$k_1 = f(x_i, y_i),$$

$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + hq_{11}k_1),$$

$$k_3 = f(x_i + p_2h, y_i + h(q_{21}k_1 + q_{22}k_2)),$$

$$k_4 = f(x_i + p_3h, y_i + h(q_{31}k_1 + q_{32}k_2 + q_{33}k_3)),$$

Sehingga bentuk umum metode Runge-Kutta orde empat dapat digambarkan ke dalam tabel Butcher sebagai berikut:

**Tabel 2.2 Tabel Butcher Runge-Kutta Orde-4**

0	0	0	0	0
$p_1$	$q_{11}$	0	0	0
$p_2$	$q_{21}$	$q_{22}$	0	0
$p_3$	$q_{31}$	$q_{32}$	$q_{33}$	0
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$

Berdasarkan Tabel 2.2 dapat dilihat metode Runge-Kutta orde empat memiliki tiga belas parameter  $a_1, a_2, a_3, a_4, p_1, p_2, p_3, q_{11}, q_{21}, q_{31}, q_{22}, q_{32}, q_{33}$ . Nilai parameter-parameter tersebut dapat diperoleh dengan mengekspansi  $k_1, k_2, k_3$  dan  $k_4$  ke dalam bentuk deret Taylor dengan menjabarkan  $k_n$  hanya terhadap variabel  $y$  maka diperoleh:

$$k_1 = f(y_i), \quad (2.14)$$

$$k_2 = f(y_i + hq_{11}k_1), \quad (2.15)$$

$$k_3 = f(y_i + h(q_{21}k_1 + q_{22}k_2)), \quad (2.16)$$

$$k_4 = f(y_i + h(q_{31}k_1 + q_{32}k_2 + q_{33}k_3)). \quad (2.17)$$

Maka ekspansi  $k_1, k_2, k_3$  dan  $k_4$  pada Persamaan (2.14) sampai (2.17) dalam bentuk deret Taylor, yaitu:

$$k_1 = f, \quad (2.18)$$



### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$k_2 = f + hq_{11}ff_y + \frac{h^2}{2}q_{11}^2f^2f_{yy} + \frac{h^3}{6}q_{11}^3f^3f_{yyy} + \frac{h^4}{24}q_{11}^4f^4f_{yyyy}, \quad (2.19)$$

$$k_3 = f + h(q_{21} + q_{22})ff_y + h^2(q_{11}q_{22}ff_y^2 + \frac{1}{2}(q_{21}q_{22})^2f^2f_{yy}) + h^3((\frac{1}{2}q_{11}^2q_{22} + q_{11}(q_{21} + q_{22})q_{22})f^3f_{yy} + \frac{1}{6}(q_{21} + q_{22})^3f^3f_{yyy})), \quad (2.20)$$

$$k_4 = f + h(q_{41} + q_{42} + q_{43})ff_y + h^2((q_{21}q_{32}ff_y^2 + (q_{31} + q_{32})q_{43}ff_y^2) + \frac{1}{2}(q_{41} + q_{42} + q_{43})^2f^2f_{yy}) + h^3((\frac{1}{2}q_{21}^2q_{42}f^2f_{yy} + q_{43}q_{32}q_{21}ff_y^3) + (\frac{1}{2}(q_{41} + q_{42} + q_{43})(q_{31} + q_{32})q_{43}f^2f_{yy}) + (\frac{1}{2}(q_{41} + q_{42} + q_{43})q_{43}q_{21}f^2f_{yy} + \frac{1}{6}(q_{41} + q_{42} + q_{43})f^3f_{yyy}))). \quad (2.21)$$

Substitusikan Persamaan (2.18) sampai (2.21) ke Persamaan (2.13), kemudian bandingkan dengan deret Taylor pada Persamaan (2.11) untuk mendapatkan Persamaan parameternya, sehingga diperoleh:

$$a_2q_{11} + a_3(q_{21} + q_{22}) + a_4(q_{31} + q_{32} + q_{33}) = \frac{1}{2}, \quad (2.22a)$$

$$a_2q_{11}^2 + a_3(q_{21} + q_{22})^2 + a_4(q_{31} + q_{32} + q_{33})^2 = \frac{1}{3}, \quad (2.22b)$$

$$a_2q_{11}^3 + a_3(q_{21} + q_{22})^3 + a_4(q_{31} + q_{32} + q_{33})^3 = \frac{1}{4}, \quad (2.22c)$$

$$a_3q_{22}q_{11} + a_4q_{32}q_{11} + a_4q_{22}(q_{21} + q_{22}) = \frac{1}{6}, \quad (2.22d)$$

$$a_3q_{22}q_{11}^2 + a_4q_{32}q_{11}^2 + a_4q_{22}(q_{21} + q_{22})^2 = \frac{1}{12}, \quad (2.22e)$$

$$a_3q_{11}q_{22}(q_{21} + q_{22}) + a_4(q_{31} + q_{32} + q_{33})(q_{11}q_{32} + q_{33}(q_{21} + q_{22})) = \frac{1}{8}, \quad (2.22f)$$

$$a_4q_{33}q_{22}q_{11} = \frac{1}{24}. \quad (2.22g)$$

Persamaan (2.22a) sampai (2.22g) terdiri dari 10 parameter, ambil 3 parameter bebas untuk mendapatkan bentuk dari metode Runge-Kutta orde empat.

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## 2.4 Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann

Metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann adalah metode Runge-Kutta dengan mengambil nilai parameter bebas:

$$p_1 = \frac{2}{5}, p_2 = \frac{3}{5}, \text{ dan } p_3 = 1. \quad (2.23)$$

Kemudian substitusikan 3 parameter pada Persamaan (2.23) ke Persamaan (2.22) dan berdasarkan Tabel 2.2 diperoleh nilai parameter sebagai berikut:

$$q_{11} = \frac{2}{5}, q_{21} = -\frac{3}{20}, q_{31} = \frac{19}{44}, q_{22} = \frac{3}{4}, q_{32} = -\frac{15}{44}, q_{33} = \frac{40}{44},$$

$$a_1 = \frac{55}{360}, a_2 = \frac{125}{360}, a_3 = \frac{125}{360}, a_4 = \frac{55}{360}. \quad (2.24)$$

Selanjutnya substitusikan Persamaan (2.23) dan (2.24) ke Persamaan (2.13), maka diperoleh bentuk Persamaan metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{360} (55k_1 + 125k_2 + 125k_3 + 55k_4), \quad (2.25)$$

dengan

$$k_1 = f(x_i, y_i),$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{2}{5}h, y_i + h\frac{2}{5}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{3}{5}h, y_i + h\left(-\frac{3}{20}k_1 + \frac{3}{4}k_2\right)\right),$$

$$k_4 = f\left(x_i + h, y_i + h\left(\frac{19}{44}k_1 - \frac{15}{44}k_2 + \frac{40}{44}k_3\right)\right).$$

setelah memperoleh nilai-nilai parameternya, maka metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann dapat digambarkan dalam tabel Butcher sebagai berikut:

**Tabel 2.3 Tabel Butcher Runge-Kutta Orde-4 Kuntzmann**

0	0	0	0	0
2	2	0	0	0
15	5			
3	3	0	0	
15	$-\frac{3}{20}$	$\frac{3}{4}$	0	0
1	$\frac{19}{44}$	$-\frac{15}{44}$	$\frac{40}{44}$	0
	$\frac{55}{360}$	$\frac{125}{360}$	$\frac{125}{360}$	$\frac{55}{360}$

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## 2.5 Galat Pemotongan

Pada aproksimasi polinomial di titik  $(n + 1)$  data, terdapat perbedaan atau *error* terhadap nilai sesungguhnya atau nilai eksak. Nilai perbedaan tersebut dapat dicari dengan menggunakan Galat pemotongan. Jika polinomial derajat  $(p + 1)$  disubstitusikan ke rumus orde  $p$ , maka dapat dibangun sebuah bentuk error:

$$T(x, h) = Ch^{p+1}y^{(p+1)}(\xi). \quad (2.26)$$

Aplikasi algoritma dan proses perhitungan dari bentuk  $x_0$  ke  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$  dalam pengertian yang luas dapat didefinisikan sebagai metode satu langkah, yang secara umum di tulis sebagai:

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x, y(x); h), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

dengan  $\Phi$  adalah fungsi naik yang terdapat unsur  $x_n, y_n$  dan menggunakan  $h$ . Misalkan  $y(x)$  adalah solusi eksak untuk persamaan diferensial biasa, maka untuk setiap  $x$  galat pemotongan didefinisikan sebagai:

$$T(x, h) = y(x) + h\Phi(x, y(x); h) - y(x + h). \quad (2.27)$$

Jika  $p$  lebih besar dari bilangan integer  $p'$ , maka:

$$T(x, h) = O(h^{p+1}).$$

Tipe galat pemotongan bergantung pada metode komputasi yang digunakan untuk penghampiran. Galat Runge-Kutta orde empat Kuntzmann diperoleh dengan melakukan langkah-langkah yang sama untuk menentukan nilai parameter RungeKutta orde empat Kuntzmann seperti yang telah dibahas pada sub-bab 2.3 sebelumnya. Nilai  $k_1, k_2, k_3$  dan  $k_4$  pada Persamaan (2.25) diekspansi dalam bentuk deret Taylor sampai orde lima ( $h^5$ ) seperti pada Persamaan (2.18) sampai (2.21). Kemudian substitusikan ke Persamaan (2.25) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} y_{i+1} = y_i + hf + \left(\frac{1}{2}ff_y\right)h^2 + \left(\frac{1}{6}ff_y^2 + \frac{1}{6}f_{yy}f^2\right)h^3 + \left(\frac{1}{24}f^3f_{yyy} + \right. \\ \left. \frac{1}{6}f^2f_yf_{yy} + \frac{1}{24}ff_y^3\right)h^4 + \left(\frac{31}{36000}f^4f_{yyyy} + \frac{103}{1800}f^3f_yf_{yyy} \right. \\ \left. + \frac{1}{30}f^3f_{yy}^2 + \frac{91}{880}f^2f_y^2f_{yy}\right)h^5. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Kemudian bandingkan Persamaan (2.28) dengan ekspansi deret Taylor untuk  $y_{i+1}$  sampai suku ke 6 sebagai berikut:



#### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2!} f f_y + \frac{h^3}{3!} (f f_y^2 + f_{yy} f^2) + \frac{h^4}{4!} (f^3 f_{yyy} + 4f^2 f_y f_{yy} + f f_y^3) + h^5 \left( \frac{1}{120} f^4 f_{yyyy} + \frac{11}{120} f^2 f_y^2 f_{yy} + \frac{4}{120} f^3 f_y^2 + \frac{1}{120} f f_y^4 + \frac{7}{120} f^3 f_y f_{yyy} \right) + O(h^6). \quad (2.29)$$

Sehingga diperoleh galat dari metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann sebagai berikut :

$$Galat = \frac{h^5}{39600} (11f^4 f_{yyyy} - 44f^3 f_y f_{yyy} - 330f f_y^4 + 465f^2 f_y^2 f_{yy}) + O(h^6). \quad (2.30)$$

### 2.6 Kestabilan Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann

Kestabilan metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann diperoleh dengan menyelesaikan Persamaan diferensial.

**Teorema 2.2 (Lapidus, 1971)**  $A(y)$  stabil jika semua solusi mendekati 0 dan  $n$  menuju tak hingga dimana nilai  $h$  tetap dan  $h > 0$  menuju  $y' = \lambda y$  dimana  $\lambda$  adalah bilangan konstan kompleks.

$$y' = \lambda y. \quad (2.31)$$

Langkah pertama untuk memperoleh kestabilan dari metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann adalah dengan mensubstitusikan Persamaan (2.31) ke Persamaan  $k_1, k_2, k_3$ , dan  $k_4$  pada Persamaan (2.25) hanya terhadap variabel  $y$ , sehingga diperoleh:

$$k_1 = \lambda y_i, \quad (2.32)$$

$$k_2 = \lambda y_i + \frac{2}{5} h \lambda^2 y_i, \quad (2.33)$$

$$k_3 = \lambda y_i + \frac{3}{5} h \lambda^2 y_i + \frac{3}{10} h^2 \lambda^3 y_i, \quad (2.34)$$

$$k_4 = \lambda y_i + h \lambda^2 y_i + \frac{9}{22} h^2 \lambda^3 y_i + \frac{3}{11} h^3 \lambda^4 y_i. \quad (2.35)$$

Substitusikan Persamaan (2.32) sampai (2.35) ke Persamaan (2.25), maka diperoleh:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{360} \left( 55\lambda y_i + 125 \left( \lambda y_i + \frac{2}{5} h \lambda^2 y_i \right) + 125 \left( \lambda y_i + \frac{3}{5} h \lambda^2 y_i + \frac{3}{10} h^2 \lambda^3 y_i \right) + 55 \left( \lambda y_i + h \lambda^2 y_i + \frac{9}{22} h^2 \lambda^3 y_i + \frac{3}{11} h^3 \lambda^4 y_i \right) \right), \quad (2.36)$$

#### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

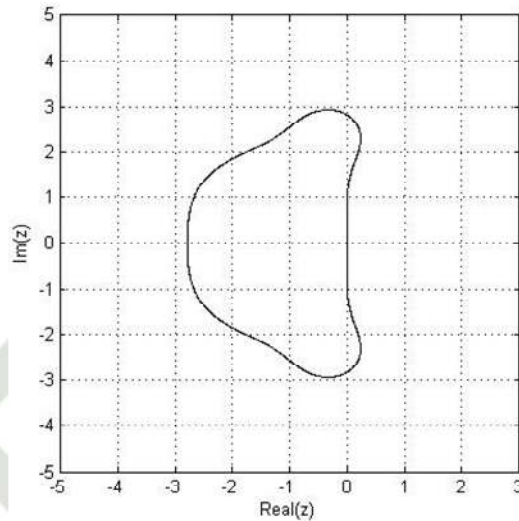
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

atau

$$\frac{y_{i+1}}{y_i} = 1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 + \frac{1}{6}h^3\lambda^3 + \frac{1}{24}h^4\lambda^4. \quad (2.37)$$

Misalkan  $z = \lambda h$  pada Persamaan (2.32), maka diperoleh polinomial stabilitas metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann sebagai berikut:

$$\frac{y_{i+1}}{y_i} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4. \quad (2.38)$$



Gambar 2.1 Daerah kestabilan metode runge-kutta orde empat Kuntzmann

### 2.7 Rata-rata pangkat

Rata-rata pangkat merupakan bentuk rata-rata yang didefinisikan sebagai berikut:

**Definisi 2.1 (Cizmesija, 2012):** Misalkan  $a$  dan  $b$  adalah bilangan real positif. Untuk  $p \in \mathbb{R}$ , rata-rata pangkat orde  $p$  dari bilangan  $a$  dan  $b$  didefinisikan dengan:

$$M_p(a, b) = \begin{cases} \left( \frac{a^p + b^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}}, & p \neq 0 \\ \sqrt{ab}, & p = 0 \end{cases}$$

Rata-rata pangkat untuk  $p = \frac{1}{2}$  dapat ditulis:

$$M_{\frac{1}{2}}(a, b) = M_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{a+b}{2} + \sqrt{ab} \right). \quad (2.39)$$

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## 2.7 Deret Binomial

Deret binomial adalah deret yang memberikan ekspansi atau pangkat dari penjumlahan anara dua variabel. Salah satu fungsi deret Binomial adalah unuk memberikan bntuk lain dari fungsi pangkat pecahan sehingga nilai penyelesaiannya diperoleh dalam bentuk ekspansi deret.

Pada penelitian ini diperlukan deret Binomial untuk mengubah bentuk akar atay fungsi berpangkat  $1/2$  pada rata-rata pangkat menjadi bentuk tanpa akar. Penjelasan deret Binomial secara matematis dapat dilihat pada teorema berikut:

**Teorema 2.3 (Purcell, 2008)** untuk sebarang bilangan real  $p$  dan untuk  $|x| < 1$ ,

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \dots \quad (2.40)$$

atau

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n. \quad (2.41)$$

**Contoh 2.2** tentukan ekspansi binomial dari fungsi berikut:

$$f(x) = (1+x)^{1/2}$$

**Penyelesaian :**

$$\binom{p}{1} = \frac{1}{2},$$

$$\binom{p}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!} = -\frac{1}{8},$$

$$\binom{p}{3} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} = \frac{1}{16},$$

$$\binom{p}{4} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}$$

$$= -\frac{5}{128}.$$

Sehingga diperoleh deret binomial dari  $(1+x)^{\frac{1}{2}}$  sebagai berikut:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots \quad (2.42)$$



#### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumpulkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## BAB III

### METODOLOGI PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penyelesaian Tugas Akhir ini adalah metode studi literatur yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi yang dibutuhkan dalam penelitian baik berasal dari buku-buku dan jurnal yang berhubungan dengan penelitian.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Diberikan bentuk metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann, yaitu:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{360} (55k_1 + 125k_2 + 125k_3 + 55k_4). \quad (3.1)$$

2. Metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann pada Persamaan (3.1) dibentuk ke dalam rumusan yang memuat unsur aritmatik, yaitu:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{36} \left( \frac{11(k_1+k_2)}{2} + \frac{14(k_2+k_3)}{2} + \frac{11(k_3+k_4)}{2} \right). \quad (3.2)$$

3. Mengganti bentuk rata-rata aritmatik  $\frac{k_n+k_{n+1}}{2}$  pada Persamaan (3.2) menjadi bentuk rata-rata pangkat  $p = 1/2$  yaitu,  $\frac{1}{2} \left( \frac{k_n+k_{n+1}}{2} + \sqrt{k_n k_{n+1}} \right)$ .
4. Menentukan nilai  $k_1, k_2, k_3$  dan  $k_4$  metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata pangkat.
5. Substitusikan nilai  $k_1, k_2, k_3$  dan  $k_4$  yang didapat ke dalam persamaan metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann menggunakan rata-rata pangkat.
6. Memperoleh rumusan dari modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata pangkat  $p = 1/2$ .
7. Menentukan galat dari modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata pangkat  $p = 1/2$ .
8. Menggambarkan kestabilan modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann.
9. Mengaplikasikan modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann dalam persoalan persamaan diferensial.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## BAB V

### PENUTUP

#### 5.1 Kesimpulan

Metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann memiliki bentuk umum sebagai berikut

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{360} (55k_1 + 125k_2 + 125k_3 + 55k_4).$$

Dari hasil pembahasan diperoleh:

- a. Dengan mengambil nilai  $p = 1/2$  untuk rata-rata kuasa, Runge-Kutta orde empat Kuntzmann tersebut dimodifikasi hingga diperoleh persamaan baru sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{72} \left( \left( 11 \frac{k_1 + k_2}{2} + 14 \frac{k_2 + k_3}{2} + 11 \frac{k_3 + k_4}{2} \right) + (11\sqrt{k_1 k_2} + 14\sqrt{k_2 k_3} + 11\sqrt{k_3 k_4}) \right)$$

dengan

$$k_1 = f(x_i, y_i),$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{2h}{5}, y_i + \frac{2h}{5} k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{3h}{5}, y_i + h \left( \left( \frac{309}{1000} - \frac{3}{1000} \sqrt{26059} \right) k_1 + \left( \frac{291}{1000} + \frac{3}{1000} \sqrt{26059} \right) k_2 \right) \right),$$

$$k_4 = f\left(x_i + h, y_i + h \left( \left( -\frac{483}{220} + \frac{7}{440} \sqrt{26059} \right) k_1 + \left( \frac{1149}{220} - \frac{3}{88} \sqrt{26059} \right) k_2 + \left( -\frac{223}{110} + \frac{1}{55} \sqrt{26059} \right) k_3 \right) \right).$$

- b. Persamaan baru memiliki galat pada orde ke lima sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Galat = & \frac{h^5}{1584000000} \left( 440000 f^4 f_{yyyy} + (101604732 - 508944 \sqrt{26059}) \right. \\ & f^2 f_y^2 f_{yy} + (-35989800 + 211200 \sqrt{26059}) f^3 f_y^2 + (18440400 \\ & \left. - 123200 \sqrt{26059}) f^3 f_y f_{yyy} + (-38431695 + 107040 \sqrt{26059}) f f_y^4 \right) \end{aligned}$$

## Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

dan memiliki persamaan kestabilan sebagai berikut:

$$\frac{y_{i+1}}{y_i} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \left( -\frac{1682113}{105600000} + \frac{223}{3300000}\sqrt{26059} \right) z^5.$$

- c. Berdasarkan simulasi numerik yang diterapkan pada 2 contoh persamaan diferensial biasa orde satu yang diselesaikan menggunakan metode RKKu, RKKuCoH, RKKuH, dan RKKuP diperoleh bahwa pada Contoh 4.1 dengan persamaan  $y' = y$  metode RKKu lebih baik dibandingkan dengan metode RKKuCoH, RKKuH, dan RKKuP. Kemudian dengan persamaan  $y' = 1/y$  metode RKKuP lebih baik dibandingkan metode RKKu, RKKuCoH maupun RKKuH, karena memiliki galat yang relatif kecil. Artinya, modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata pangkat  $p = 1/2$  lebih akurat dari pada metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann untuk contoh soal  $y' = 1/y$ .

## 5.2 Saran

Pada tugas akhir ini, penulis menggunakan rata-rata pangkat dengan  $p = 1/2$  untuk memodifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann. Penulis juga menggambarkan kestabilan dari hasil modifikasi tersebut. Selain itu dalam simulasi numeriknya penulis hanya membandingkan tiga metode. Selanjutnya, penulis menyarankan kepada para pembaca untuk mengembangkan hasil modifikasi pada tugas akhir ini menggunakan rata-rata yang lain maupun jenis metode Runge-Kutta yang lain dengan harapan dapat memperoleh solusi numerik yang lebih teliti dalam menyelesaikan permasalahan matematis yang diberikan dalam bentuk persamaan diferensial.

UIN SUSKA RIAU



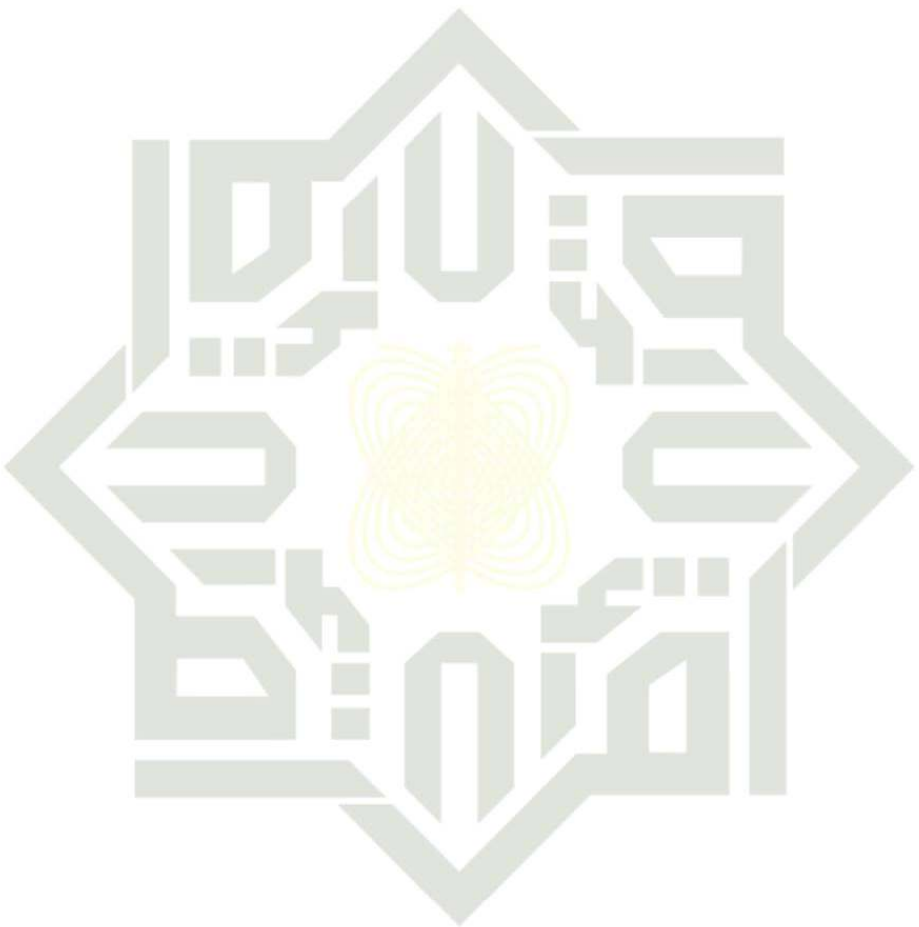
## DAFTAR PUSTAKA

- Cizmesija, A. "The Optimal Power Mean Bounds for Two Convex Combinations of A-G-H Means." *Journal of Math Inequalities*. Vol. 6, hal. 33-41. 2012.
- Evans, D.J. "A New 4<sup>th</sup> Order Ruge-Kutta Method for Initial Value Problems with Error Control." *International Journal Computer Mathematics*. Vol. 39, hal. 217-227. 1989.
- Evans, D. J. dan A.R. Yaakub. "A New Fourth Order Runge-Kutta Formula Based on the Contra-Harmonic  $C_0M$  Mean". *International Journal of Computer Mathematics*. Vol.57, hal. 249-256, 1995.
- Lapidus, Leon. dan John H. Seinfeld. "Numerical Solution of Ordinary Differential Equations". Academic Press, New York. 1971.
- Mirna. "Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann Berdasarkan Rata-Rata Harmonik". *Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Islam Negri Sultan Syarif Kasim Riau*. 2013.
- Muda, Y. dan Sarah, H "Modification of Fourth Order Clasical Runge-Kutta Method Based of Power Mean  $p = 1/2$ ". *Journal of Southeast Asians Reasearch*. 2019
- Murugesan, K. dan D. Paul Dhayabaran. dkk. "A Fourth Order Embedded Runge-Kutta RKACeM(4,4) Method Based on Arithmetic and Centroidal Means with Error Control". *International Journal of Computer Mathematics*. Vol 79, hal. 247-269. 2002.
- Nasution, N. A. "Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann Berdasarkan Rata-Rata Kontra Harmonik". *Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Islam Negri Sultan Syarif Kasim Riau..* 2013.
- Purcel, E.J., Dale Varberg, dan Steven E.R. "Kalkulus Edisi Kesembilan". Jilid 1. Hal. 347-348. Penerbit Erlangga, Jakarta. 2008.
- Sanugi, B.B. dan D. J. Evans. "A New Fourth Order Runge-Kutta Formula Based on the Harmonic Mean". *International Journal of Computer Mathematics*. Vol. 50, hal. 113-118, 1994.
- Ulfa, F dan Wartono. "Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde Empat Klasik Menggunakan Kombinasi Deret Lehmer Dengan  $p = 1$  dan  $p = 4$  ". *Semnas MIPakes UMRI*. Vol.1/Agustus, 2019.
- Xie, W.C. "Differential Equations For Engineers". Cambridge University Pers, New York 2010.

### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Yuliarni, L. “Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann Berdasarkan Rata-Rata Geometri”. *Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau*.. 2013.



UIN SUSKA RIAU

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## LAMPIRAN A

### Nilai Parameter Metode RKKuP

$$\begin{aligned}
 & \text{restart,} \\
 & p_2 := \frac{3}{5}; \\
 & p_3 := 1; \\
 & \frac{(25 \cdot q_{11} + 25 \cdot p_2 + 11 \cdot p_3)}{72} - \frac{1}{2}, \\
 & \frac{(25 \cdot q_{11}^2 + 25 \cdot p_2^2 + 11 \cdot p_3^2)}{144} - \frac{1}{6}, \\
 & \frac{(22 \cdot p_2 \cdot p_3 - 25 \cdot q_{11}^2 - 25 \cdot p_2^2 - 11 \cdot p_3^2)}{576} \\
 & + \frac{q_{11} \cdot (100 \cdot q_{22} + 44 \cdot q_{32} + 14 \cdot p_2) + 44 \cdot p_2 \cdot q_{33}}{288} - \frac{1}{6}, \\
 & - \frac{257}{1440} - \frac{25}{576} q_{11}^2 + \frac{1}{288} q_{11} \left( 100 q_{22} + 44 q_{32} + \frac{42}{5} \right) + \frac{11}{120} q_{33} \\
 & \frac{(25 q_{11}^3 + 25 p_2^3 + 11 \cdot p_3^3)}{432} - \frac{1}{24}, \\
 & \frac{25}{432} q_{11}^3 - \frac{1}{270}
 \end{aligned}$$

UIN SUSKA RIAU



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{576} \left( 11 \cdot p_2 p_3^2 + 11 \cdot p_2^2 p_3 - 11 \cdot p_3^3 - 25 \cdot p_2^3 - 25 \cdot q_{11}^3 + 14 \cdot p_2^2 q_{11} \right. \\ & \quad \left. + 14 \cdot p_2 q_{11}^2 \right) + \frac{1}{288} \left( 22 \cdot p_2^2 q_{33} + 100 \cdot p_2 q_{22} q_{11} + 44 \cdot p_3 \right. \\ & \quad \left. q_{32} q_{11} + 44 \cdot p_2 p_3 q_{33} + 50 \cdot q_{11}^2 q_{22} + 22 \cdot q_{32} q_{11}^2 \right) - \frac{1}{6}; \\ & - \frac{1273}{7200} - \frac{25}{576} q_{11}^3 + \frac{7}{800} q_{11} + \frac{7}{480} q_{11}^2 + \frac{143}{1200} q_{33} + \frac{5}{24} q_{22} q_{11} \\ & \quad + \frac{11}{72} q_{32} q_{11} + \frac{25}{144} q_{11}^2 q_{22} + \frac{11}{144} q_{32} q_{11}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1152} \left( 25 \cdot q_{11}^3 + 25 \cdot p_2^3 + 11 \cdot p_3^3 - 11 \cdot p_2 p_3^2 - 11 p_2^2 p_3 - 14 p_2 q_{11}^2 \right. \\ & \quad \left. - 14 p_2^2 q_{11} \right) + \frac{1}{288} \left( 11 \cdot p_2^2 q_{33} + 14 q_{22} q_{11}^2 - 11 \cdot p_2 p_3 q_{33} \right. \\ & \quad \left. + 11 p_2 q_{32} q_{11} + 11 \cdot p_3 q_{22} q_{11} - 11 \cdot p_3 q_{32} q_{11} - 25 \cdot p_2 q_{22} q_{11} \right. \\ & \quad \left. + 44 \cdot q_{33} q_{22} q_{11} \right) - \frac{1}{24}; \\ & \frac{25}{1152} q_{11}^3 - \frac{527}{14400} - \frac{7}{960} q_{11}^2 - \frac{7}{1600} q_{11} - \frac{11}{1200} q_{33} + \frac{7}{144} \\ & \quad q_{11}^2 q_{22} - \frac{11}{720} q_{32} q_{11} - \frac{1}{72} q_{22} q_{11} + \frac{11}{72} q_{33} q_{22} q_{11} \end{aligned}$$

$$q_{11} := \frac{2}{5};$$

$$q_{11} := \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} eq_1 &:= -\frac{257}{1440} - \frac{25}{576} q_{11}^2 + \frac{1}{288} q_{11} \left( 100 q_{22} + 44 q_{32} + \frac{42}{5} \right) \\ & \quad + \frac{11}{120} q_{33}; \end{aligned}$$

$$eq_1 := -\frac{139}{800} + \frac{5}{36} q_{22} + \frac{11}{180} q_{32} + \frac{11}{120} q_{33}$$

$$\begin{aligned} eq_2 &:= -\frac{1273}{7200} - \frac{25}{576} q_{11}^3 + \frac{7}{800} q_{11} + \frac{7}{480} q_{11}^2 + \frac{143}{1200} q_{33} \\ & \quad + \frac{5}{24} q_{22} q_{11} + \frac{11}{72} q_{32} q_{11} + \frac{25}{144} q_{11}^2 q_{22} + \frac{11}{144} q_{32} q_{11}^2; \end{aligned}$$

$$eq_2 := -\frac{139}{800} + \frac{143}{1200} q_{33} + \frac{1}{9} q_{22} + \frac{11}{150} q_{32}$$

### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\begin{aligned}
 & \rightarrow eq_3 := \frac{25}{1152} q_{11}^3 - \frac{527}{14400} - \frac{7}{960} q_{11}^2 - \frac{7}{1600} q_{11} - \frac{11}{1200} q_{33} \\
 & \quad + \frac{7}{144} q_{11}^2 q_{22} - \frac{11}{720} q_{32} q_{11} - \frac{1}{72} q_{22} q_{11} + \frac{11}{72} q_{33} q_{22} q_{11}; \\
 & eq_3 := -\frac{61}{1600} - \frac{11}{1200} q_{33} + \frac{1}{450} q_{22} - \frac{11}{1800} q_{32} + \frac{11}{180} q_{33} q_{22} \\
 & \rightarrow solve(\{eq_1, eq_2, eq_3\}); \\
 & \left\{ q_{22} = \frac{3}{20} RootOf(-333 - 194\_Z + 50\_Z^2, label = \_L4), q_{32} = \frac{3753}{440} \right. \\
 & \quad - \frac{75}{44} RootOf(-333 - 194\_Z + 50\_Z^2, label = \_L4), q_{33} = -\frac{417}{110} \\
 & \quad \left. + \frac{10}{11} RootOf(-333 - 194\_Z + 50\_Z^2, label = \_L4) \right\} \\
 & \rightarrow allvalues(RootOf(-333 - 194\_Z + 50\_Z^2, label = \_L4)); \\
 & \quad \frac{97}{50} + \frac{1}{50} \sqrt{26059}, \frac{97}{50} - \frac{1}{50} \sqrt{26059} \\
 & \rightarrow q_{22} := \frac{3}{20} \cdot \left( \frac{97}{50} + \frac{1}{50} \sqrt{26059} \right); \\
 & \quad q_{22} := \frac{291}{1000} + \frac{3}{1000} \sqrt{26059} \\
 & \rightarrow q_{32} := \frac{3753}{440} - \frac{75}{44} \cdot \left( \frac{97}{50} + \frac{1}{50} \sqrt{26059} \right); \\
 & \quad q_{32} := \frac{1149}{220} - \frac{3}{88} \sqrt{26059} \\
 & \rightarrow q_{33} := -\frac{417}{110} + \frac{10}{11} \cdot \left( \frac{97}{50} + \frac{1}{50} \sqrt{26059} \right); \\
 & \quad q_{33} := -\frac{223}{110} + \frac{1}{55} \sqrt{26059} \\
 & \rightarrow q_{21} := \frac{3}{5} - q_{22}; \\
 & \quad q_{21} := \frac{309}{1000} - \frac{3}{1000} \sqrt{26059} \\
 & \rightarrow q_{31} := 1 - q_{32} - q_{33}; \\
 & \quad q_{31} := -\frac{483}{220} + \frac{7}{440} \sqrt{26059} \\
 & \rightarrow p_2 := q_{21} + q_{22}; p_3 := q_{31} + q_{32} + q_{33}; \\
 & \quad p_2 := \frac{3}{5} \\
 & \quad p_3 := 1
 \end{aligned}$$

## LAMPIRAN B

### Galat Metode RKKuP

```

> restart;
> g := f + s·fy +  $\frac{1}{2}$ ·s2·fyy +  $\frac{1}{6}$ ·s3·fyyy +  $\frac{1}{24}$ ·s4·fyyyy;
      g := f + s·fy +  $\frac{1}{2}$ ·s2·fyy +  $\frac{1}{6}$ ·s3·fyyy +  $\frac{1}{24}$ ·s4·fyyyy
> k1 := f:
> k2 := subs(s = ( $\frac{2}{5}$ )·k1·h, g) : k2 := series(collect(expand(k2), h),
      h, 6) :
> k3 := subs(s = (( $\frac{309}{1000}$  -  $\frac{3}{1000}$ ·√26059)·k1 + ( $\frac{291}{1000}$ 
      +  $\frac{3}{1000}$ ·√26059)·k2)·h, g) : k3 := series(collect(expand(k3),
      h), h, 6) :
> k4 := subs(s = (( $-\frac{483}{220}$  +  $\frac{7}{440}$ ·√26059)·k1 + ( $\frac{1149}{220}$ 
      -  $\frac{3}{88}$ ·√26059)·k2 + ( $-\frac{223}{110}$  +  $\frac{1}{55}$ ·√26059)·k3)·h, g) : k4
      := series(collect(expand(k4), h), h, 6) :
> x1 :=  $\frac{k_1 \cdot k_2}{f^2} - 1$  :
> x2 :=  $\frac{k_2 \cdot k_3}{f^2} - 1$  :
> x3 :=  $\frac{k_3 \cdot k_4}{f^2} - 1$  :
> b := ( $1 + \frac{1}{2}$ ·x -  $\frac{1}{8}$ ·x2 +  $\frac{1}{16}$ ·x3 -  $\frac{5}{128}$ ·x4) :
> akar1 := f·subs(x = x1, b) : akar1 := series(collect(expand(akar1),
      h), h, 6) :
> akar2 := f·subs(x = x2, b) : akar2 := series(collect(expand(akar2),
      h), h, 6) :
> akar3 := f·subs(x = x3, b) : akar3 := series(collect(expand(akar3),
      h), h, 6) :

```

#### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\begin{aligned}
 & y_{n+1} := y_n + \frac{h}{72} \cdot \left( \left( 11 \cdot \frac{k_1 + k_2}{2} + 14 \cdot \frac{k_2 + k_3}{2} + 11 \cdot \frac{k_3 + k_4}{2} \right) \right. \\
 & \quad \left. + (11 \cdot \text{akar}_1 + 14 \cdot \text{akar}_2 + 11 \cdot \text{akar}_3) \right) : y_{n+1} \\
 & := \text{series}(\text{collect}(\text{expand}(y_{n+1}), h), h, 6); \\
 & y_{n+1} := y_n + fh + \frac{1}{2} f f_y h^2 + \left( \frac{1}{6} f^2 f_{yy} + \frac{1}{6} f_y^2 f \right) h^3 \\
 & + \left( \frac{1}{6} f_{yy} f^2 f_y + \frac{1}{24} f_y^3 f + \frac{1}{24} f^3 f_{yyy} \right) h^4 + \left( \frac{31}{3600} f^4 f_{yyy} \right. \\
 & + \frac{2799}{40000} f_{yyy} f^3 f_y + \frac{1}{7500} f_{yy}^2 f^3 \sqrt{26059} \\
 & - \frac{7}{90000} f_{yyy} f^3 f_y \sqrt{26059} - \frac{10603}{33000000} f_{yy} \sqrt{26059} f^2 f_y^2 \\
 & + \frac{849}{80000} f_{yy}^2 f^3 + \frac{6855687}{44000000} f_{yy} f^2 f_y^2 + \frac{223}{3300000} f f_y^4 \sqrt{26059} \\
 & \left. - \frac{1682113}{105600000} f f_y^4 \right) h^5 + O(h^6) \\
 & y^I_{n+1} := y_n + fh + \frac{1}{2} f f_y h^2 + \left( \frac{1}{6} f^2 f_{yy} + \frac{1}{6} f_y^2 f \right) h^3 \\
 & + \left( \frac{1}{6} f_{yy} f^2 f_y + \frac{1}{24} f_y^3 f + \frac{1}{24} f^3 f_{yyy} \right) h^4 + \left( \frac{31}{3600} f^4 f_{yyy} \right. \\
 & - \frac{1682113}{105600000} f f_y^4 + \frac{223}{3300000} f f_y^4 \sqrt{26059} + \frac{849}{80000} f_{yy}^2 f^3 \\
 & + \frac{6855687}{44000000} f_{yy} f^2 f_y^2 + \frac{1}{7500} f_{yy}^2 f^3 \sqrt{26059} \\
 & - \frac{7}{90000} f_{yyy} f^3 f_y \sqrt{26059} - \frac{10603}{33000000} f_{yy} \sqrt{26059} f^2 f_y^2 \\
 & \left. + \frac{2799}{40000} f_{yyy} f^3 f_y \right) h^5; \\
 & y^I_{n+1} := y_n + fh + \frac{1}{2} f f_y h^2 + \left( \frac{1}{6} f^2 f_{yy} + \frac{1}{6} f_y^2 f \right) h^3 \\
 & + \left( \frac{1}{6} f^2 f_{yy} f_y + \frac{1}{24} f_y^3 f + \frac{1}{24} f^3 f_{yyy} \right) h^4 + \left( \frac{31}{3600} f^4 f_{yyy} \right. \\
 & - \frac{1682113}{105600000} f f_y^4 + \frac{223}{3300000} f f_y^4 \sqrt{26059} + \frac{849}{80000} f_{yy}^2 f^3 \\
 & + \frac{6855687}{44000000} f^2 f_{yy} f_y^2 + \frac{1}{7500} f_{yy}^2 f^3 \sqrt{26059} \\
 & - \frac{7}{90000} f^3 f_{yyy} f_y \sqrt{26059} - \frac{10603}{33000000} f_{yy} \sqrt{26059} f^2 f_y^2 \\
 & \left. + \frac{2799}{40000} f^3 f_{yyy} f_y \right) h^5
 \end{aligned}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

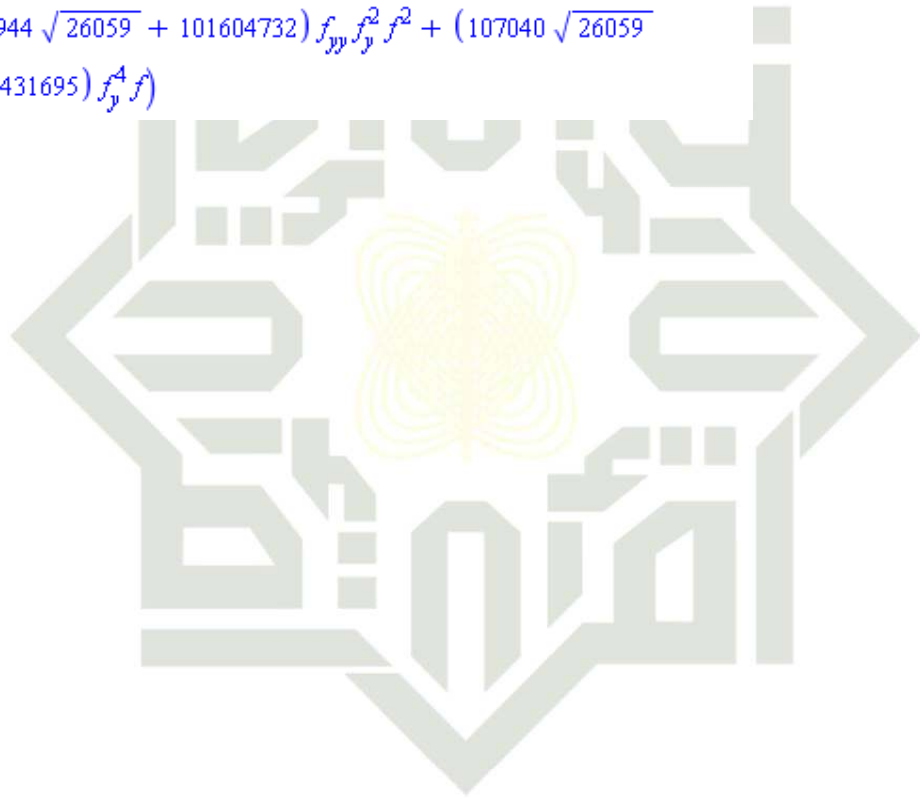
2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\begin{aligned}
 & y_{n+1}^2 := y_n + h \cdot f + \frac{1}{2} h^2 f f_y + \frac{1}{6} h^3 (f f_y^2 + f_{yy} f^2) \\
 & \quad + \frac{1}{24} h^4 (f^3 f_{yyy} + 4 f^2 f_y f_{yy} + f f_y^3) + \frac{1}{120} h^5 (f^4 f_{yyyy} + 11 f^3 f_y^2 f_{yy} \\
 & \quad + 4 f^2 f_{yy}^2 + 7 f^3 f_y f_{yyy} + f f_y^4); \\
 & y_{n+1}^2 := y_n + f h + \frac{1}{2} f f_y h^2 + \frac{1}{6} h^3 (f_y^2 f + f^2 f_{yy}) + \frac{1}{24} h^4 (f^3 f_{yyy} \\
 & \quad + 4 f_{yy} f^2 f_y + f_y^3 f) + \frac{1}{120} h^5 (f^4 f_{yyyy} + 11 f_{yy} f^2 f_y^2 + 4 f_{yy}^2 f^3 \\
 & \quad + 7 f_{yyy} f^3 f_y + f f_y^4) \\
 & \text{galat} := \text{series}(\text{collect}(\text{expand}(y_{n+1}^1 - y_{n+1}^2), [f_y, f_{yy}, f_{yyy}, f_{yyyy}]), \\
 & \quad h) : \text{galat} := \text{simplify}(\text{galat}); \\
 & \text{galat} := \left( -\frac{2562113}{105600000} f f_y^4 + \frac{223}{3300000} f f_y^4 \sqrt{26059} \right. \\
 & \quad - \frac{10603}{33000000} f_{yy} \sqrt{26059} f^2 f_y^2 + \frac{8467061}{132000000} f_{yy} f^2 f_y^2 \\
 & \quad - \frac{7}{90000} f_{yyy} f^3 f_y \sqrt{26059} + \frac{1397}{120000} f_{yyy} f^3 f_y + \frac{1}{7500} \\
 & \quad \left. f_{yy}^2 f^3 \sqrt{26059} - \frac{5453}{240000} f_{yy}^2 f^3 + \frac{1}{3600} f^4 f_{yyyy} \right) h^5 \\
 & \text{galatt} := \text{collect} \left( \frac{223}{3300000} f f_y^4 \sqrt{26059} - \frac{2562113}{105600000} f f_y^4 \right. \\
 & \quad - \frac{10603}{33000000} f_{yy} \sqrt{26059} f^2 f_y^2 + \frac{8467061}{132000000} f_{yy} f^2 f_y^2 \\
 & \quad - \frac{7}{90000} f_{yyy} f^3 f_y \sqrt{26059} + \frac{1397}{120000} f_{yyy} f^3 f_y - \frac{5453}{240000} f_{yy}^2 f^3 \\
 & \quad \left. + \frac{1}{7500} f_{yy}^2 f^3 \sqrt{26059} + \frac{1}{3600} f^4 f_{yyyy} [f, f_y, f_{yy}, f_{yyy}, f_{yyyy}] \right); \\
 & \text{galatt} := \frac{1}{3600} f^4 f_{yyyy} + \left( \left( -\frac{7}{90000} \sqrt{26059} + \frac{1397}{120000} \right) f_{yyy} f_y \right. \\
 & \quad + \left( \frac{1}{7500} \sqrt{26059} - \frac{5453}{240000} \right) f_{yy}^2 f^3 + \left( -\frac{10603}{33000000} \sqrt{26059} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{8467061}{132000000} \right) f_{yy} f_y^2 f^2 + \left( -\frac{2562113}{105600000} + \frac{223}{3300000} \sqrt{26059} \right) \\
 & \quad \left. f_y^4 f \right) \\
 & \text{galat2} := \text{expand}(1584000000 \cdot \text{galatt}); \\
 & \text{galat2} := 440000 f^4 f_{yyyy} - 123200 f_{yyy} f^3 f_y \sqrt{26059} + 18440400 f_{yyy} f^3 f_y \\
 & \quad + 211200 f_{yy}^2 f^3 \sqrt{26059} - 35989800 f_{yy}^2 f^3 - 508944 f_{yy} \sqrt{26059} f^2 \\
 & \quad f_y^2 + 101604732 f_{yy} f_y^2 f^2 - 38431695 f f_y^4 + 107040 f f_y^4 \sqrt{26059}
 \end{aligned}$$

### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\begin{aligned}
 & l := \text{collect}\left(440000 f^4 f_{yyyy} - 123200 f_{yyy} f^3 f_y \sqrt{26059} \right. \\
 & \quad + 18440400 f_{yyy} f^3 f_y - 35989800 f_{yy}^2 f^3 + 211200 f_{yy}^2 f^3 \sqrt{26059} \\
 & \quad - 508944 f_{yy} \sqrt{26059} f^2 f_y^2 + 101604732 f_{yy} f^2 f_y^2 + 107040 f \\
 & \quad \left. f_y^4 \sqrt{26059} - 38431695 f f_y^4, [f, f_y, f_{yy}, f_{yyy}, f_{yyyy}] \right) : \\
 & galatm := \frac{h^5}{1584000000} \cdot l, \\
 & galatm := \frac{1}{1584000000} h^5 \left( 440000 f^4 f_{yyyy} + \left( (-123200 \sqrt{26059} \right. \right. \\
 & \quad + 18440400) f_{yyy} f_y + (-35989800 + 211200 \sqrt{26059}) f_{yy}^2 \Big) f^3 + \left( \right. \\
 & \quad - 508944 \sqrt{26059} + 101604732) f_{yy} f_y^2 f^2 + (107040 \sqrt{26059} \\
 & \quad \left. \left. - 38431695) f_y^4 f \right) \right)
 \end{aligned}$$



UIN SUSKA RIAU



## LAMPIRAN C

### Kestabilan Metode RKKuP

$$\begin{aligned}
 & \text{restart,} \\
 & q_{22} := \frac{3}{20} \cdot \left( \frac{97}{50} + \frac{1}{50} \sqrt{26059} \right); \\
 & \quad q_{22} := \frac{291}{1000} + \frac{3}{1000} \sqrt{26059} \\
 & q_{32} := \frac{3753}{440} - \frac{75}{44} \cdot \left( \frac{97}{50} + \frac{1}{50} \sqrt{26059} \right); \\
 & \quad q_{32} := \frac{1149}{220} - \frac{3}{88} \sqrt{26059} \\
 & q_{33} := -\frac{417}{110} + \frac{10}{11} \cdot \left( \frac{97}{50} + \frac{1}{50} \sqrt{26059} \right); \\
 & \quad q_{33} := -\frac{223}{110} + \frac{1}{55} \sqrt{26059} \\
 & q_{21} := \frac{3}{5} - q_{22}; \\
 & \quad q_{21} := \frac{309}{1000} - \frac{3}{1000} \sqrt{26059} \\
 & q_{31} := 1 - q_{32} - q_{33}; \\
 & \quad q_{31} := -\frac{483}{220} + \frac{7}{440} \sqrt{26059} \\
 & q_{11} := \frac{2}{5}; \\
 & \quad q_{11} := \frac{2}{5} \\
 & y_n := y; \\
 & k_1 := \alpha \cdot y_n; \\
 & \quad k_1 := \alpha y \\
 & k_2 := \alpha \cdot (y_n + q_{11} \cdot h \cdot k_1) : \text{expand}(k_2); \\
 & \quad \alpha y + \frac{2}{5} h \alpha^2 y \\
 & k_3 := \alpha \cdot (y_n + (q_{21} \cdot k_1 + q_{22} \cdot k_2) \cdot h) : \text{expand}(k_3); \\
 & \quad \alpha y + \frac{3}{5} h \alpha^2 y + \frac{291}{2500} h^2 \alpha^3 y + \frac{3}{2500} \sqrt{26059} h^2 \alpha^3 y
 \end{aligned}$$

#### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



## Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\begin{aligned}
 & \rightarrow k_4 := \alpha \cdot (y_n + (q_{31} \cdot k_1 + q_{32} \cdot k_2 + q_{33} \cdot k_3) \cdot h) : \text{expand}(k_4); \\
 & \alpha y + h \alpha^2 y + \frac{48}{55} h^2 \alpha^3 y - \frac{3}{1100} \sqrt{26059} h^2 \alpha^3 y + \frac{91461}{275000} h^3 \alpha^4 y \\
 & \quad - \frac{87}{275000} \sqrt{26059} h^3 \alpha^4 y \\
 & \rightarrow x_1 := \frac{k_1 \cdot k_2}{(\alpha \cdot y_n)^2} - 1 : \\
 & \rightarrow x_2 := \frac{k_2 \cdot k_3}{(\alpha \cdot y_n)^2} - 1 : \\
 & \rightarrow x_3 := \frac{k_3 \cdot k_4}{(\alpha \cdot y_n)^2} - 1 : \\
 & \rightarrow b := \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x^2 + \frac{1}{16} \cdot x^3 - \frac{5}{128} \cdot x^4 \right) : \\
 & \rightarrow \text{akar}_1 := \alpha \cdot y_n \cdot \text{subs}(x = x_1, b) : \text{akar}_1 \\
 & \quad := \text{series}(\text{collect}(\text{expand}(\text{akar}_1), h), h, 5) : \\
 & \rightarrow \text{akar}_2 := \alpha \cdot y_n \cdot \text{subs}(x = x_2, b) : \text{akar}_2 \\
 & \quad := \text{series}(\text{collect}(\text{expand}(\text{akar}_2), h), h, 5) : \\
 & \rightarrow \text{akar}_3 := \alpha \cdot y_n \cdot \text{subs}(x = x_3, b) : \text{akar}_3 \\
 & \quad := \text{series}(\text{collect}(\text{expand}(\text{akar}_3), h), h, 5) : \\
 & \rightarrow y_{n+1} := y_n + \frac{h}{72} \cdot \left( \left( 11 \cdot \frac{k_1 + k_2}{2} + 14 \cdot \frac{k_2 + k_3}{2} + 11 \cdot \frac{k_3 + k_4}{2} \right) \right. \\
 & \quad \left. + (11 \cdot \text{akar}_1 + 14 \cdot \text{akar}_2 + 11 \cdot \text{akar}_3) \right) : y_{n+1} \\
 & \quad := \text{series}(\text{collect}(\text{expand}(y_{n+1}), h), h, 7); \\
 & y_{n+1} := y + \alpha y h + \frac{1}{2} \alpha^2 y h^2 + \frac{1}{6} \alpha^3 y h^3 + \frac{1}{24} \alpha^4 y h^4 + \left( \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1682113}{105600000} \alpha^5 y + \frac{223}{3300000} \alpha^5 y \sqrt{26059} \right) h^5 + O(h^6) \\
 & \rightarrow \text{stability} := y + \alpha y h + \frac{1}{2} \alpha^2 y h^2 + \frac{1}{6} \alpha^3 y h^3 + \frac{1}{24} \alpha^4 y h^4 + \left( \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1682113}{105600000} \alpha^5 y + \frac{223}{3300000} \alpha^5 y \sqrt{26059} \right) h^5 : \\
 & \rightarrow \text{stability} := \text{expand}\left(\frac{\text{stability}}{y_n}\right); \\
 & \text{stability} := 1 + h \alpha + \frac{1}{2} h^2 \alpha^2 + \frac{1}{6} h^3 \alpha^3 + \frac{1}{24} h^4 \alpha^4 \\
 & \quad - \frac{1682113}{105600000} h^5 \alpha^5 + \frac{223}{3300000} h^5 \alpha^5 \sqrt{26059}
 \end{aligned}$$

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## LAMPIRAN D

**Tabel Penyelesaian Eksak, Numerik, dan Galat untuk Persamaan  $y' = y$  Menggunakan Metode RKKu, RKKuCoH, RKKuH, dan RKKuP**

Metode RKKu

n	x	Solusi eksak	Solusi Numerik	Galat
0	0.00	1.00000000000000	1.00000000000000	0.000000e+00
1	0.10	1.105170918076	1.105170833333	8.47423e-08
2	0.20	1.221402758160	1.221402570851	1.87309e-07
3	0.30	1.349858807576	1.349858497063	3.10513e-07
4	0.40	1.491824697641	1.491824240081	4.57561e-07
5	0.50	1.648721270700	1.648720638597	6.32103e-07
6	0.60	1.822118800391	1.822117962092	8.38299e-07
7	0.70	2.013752707470	2.013751626597	1.08087e-06
8	0.80	2.225540928492	2.225539563292	1.36520e-06
9	0.90	2.459603111157	2.459601413780	1.69738e-06
10	1.00	2.718281828459	2.718279744135	2.08432e-06

Metode RKKuCoH

n	x	Solusi eksak	Solusi Numerik	Galat
0	0.00	1.00000000000000	1.00000000000000	0.000000e+00
1	0.10	1.105170918076	1.105171022613	1.04537e-07
2	0.20	1.221402758160	1.221402989224	2.31064e-07
3	0.30	1.349858807576	1.349859190623	3.83047e-07
4	0.40	1.491824697641	1.491825262085	5.64443e-07
5	0.50	1.648721270700	1.648722050458	7.79758e-07
6	0.60	1.822118800391	1.822119834510	1.03412e-06
7	0.70	2.013752707470	2.013754040829	1.33336e-06
8	0.80	2.225540928492	2.225542612594	1.68410e-06
9	0.90	2.459603111157	2.459605205030	2.09387e-06
10	1.00	2.718281828459	2.718284399667	2.57121e-06

UIN SUSKA RIAU





**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Metode RKKuH

n	x	Solusi eksak	Solusi Numerik	Galat
0	0.00	1.0000000000000	1.0000000000000	0.000000e+00
1	0.10	1.105170918076	1.105170618073	3.00002e-07
2	0.20	1.221402758160	1.221402095052	6.63108e-07
3	0.30	1.349858807576	1.349857708305	1.09927e-06
4	0.40	1.491824697641	1.491823077798	1.61984e-06
5	0.50	1.648721270700	1.648719032946	2.23775e-06
6	0.60	1.822118800391	1.822115832670	2.96772e-06
7	0.70	2.013752707470	2.013748880993	3.82648e-06
8	0.80	2.225540928492	2.225536095451	4.83304e-06
9	0.90	2.459603111157	2.459597102154	6.00900e-06
10	1.00	2.718281828459	2.718274449599	7.37886e-06

Metode RKKuP

n	x	Solusi eksak	Solusi Numerik	Galat
0	0.00	1.0000000000000	1.0000000000000	0.000000e+00
1	0.10	1.105170918076	1.105170785875	1.32200e-07
2	0.20	1.221402758160	1.221402465952	2.92208e-07
3	0.30	1.349858807576	1.349858323166	4.84410e-07
4	0.40	1.491824697641	1.491823983834	7.13807e-07
5	0.50	1.648721270700	1.648720284601	9.86099e-07
6	0.60	1.822118800391	1.822117492621	1.30777e-06
7	0.70	2.013752707470	2.013751021278	1.68619e-06
8	0.80	2.225540928492	2.225538798742	2.12975e-06
9	0.90	2.459603111157	2.459600463202	2.64795e-06
10	1.00	2.718281828459	2.718278576856	3.25160e-06

UIN SUSKA RIAU

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## LAMPIRAN E

**Tabel Penyelesaian Eksak, Numerik, dan Galat untuk Persamaan  $y' = 1/y$  Menggunakan Metode RKKu, RKKuCoH, RKKuH, dan RKKuP**

Metode RKKu

n	x	Solusi eksak	Solusi Numerik	Galat
0	0.00	1.00000000000000	1.00000000000000	0.000000e+00
1	0.10	1.095445115010	1.095445228922	1.13911e-07
2	0.20	1.183215956620	1.183216114541	1.57921e-07
3	0.30	1.264911064067	1.264911238878	1.74810e-07
4	0.40	1.341640786500	1.341640966540	1.80040e-07
5	0.50	1.414213562373	1.414213742314	1.79941e-07
6	0.60	1.483239697419	1.483239874766	1.77347e-07
7	0.70	1.549193338483	1.549193512092	1.73609e-07
8	0.80	1.612451549660	1.612451719064	1.69404e-07
9	0.90	1.673320053068	1.673320218145	1.65076e-07
10	1.00	1.732050807569	1.732050968373	1.60804e-07

Metode RKKuCoH

n	x	Solusi eksak	Solusi Numerik	Galat
0	0.00	1.00000000000000	1.00000000000000	0.000000e+00
1	0.10	1.095445115010	1.095445994003	8.78993e-07
2	0.20	1.183215956620	1.183217171507	1.21489e-06
3	0.30	1.264911064067	1.264912406217	1.34215e-06
4	0.40	1.341640786500	1.341642166944	1.38044e-06
5	0.50	1.414213562373	1.414214940753	1.37838e-06
6	0.60	1.483239697419	1.483241054998	1.35758e-06
7	0.70	1.549193338483	1.549194666784	1.32830e-06
8	0.80	1.612451549660	1.612452845295	1.29564e-06
9	0.90	1.673320053068	1.673321315237	1.26217e-06
10	1.00	1.732050807569	1.732052036790	1.22922e-06

UIN SUSKA RIAU



### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Metode RKKuH

n	x	Solusi eksak	Solusi Numerik	Galat
0	0.00	1.00000000000000	1.00000000000000	0.000000e+00
1	0.10	1.095445115010	1.095444992142	1.22868e-07
2	0.20	1.183215956620	1.183215785551	1.71069e-07
3	0.30	1.264911064067	1.264910874168	1.89900e-07
4	0.40	1.341640786500	1.341640590541	1.95959e-07
5	0.50	1.414213562373	1.414213366255	1.96118e-07
6	0.60	1.483239697419	1.483239503938	1.93481e-07
7	0.70	1.549193338483	1.549193148941	1.89542e-07
8	0.80	1.612451549660	1.612451364606	1.85053e-07
9	0.90	1.673320053068	1.673319872665	1.80403e-07
10	1.00	1.732050807569	1.732050631777	1.75792e-07

Metode RKKuP

n	x	Solusi eksak	Solusi Numerik	Galat
0	0.00	1.00000000000000	1.00000000000000	0.000000e+00
1	0.10	1.095445115010	1.095445188424	7.34134e-08
2	0.20	1.183215956620	1.183216058547	1.01927e-07
3	0.30	1.264911064067	1.264911177001	1.12933e-07
4	0.40	1.341640786500	1.341640902885	1.16385e-07
5	0.50	1.414213562373	1.414213678744	1.16371e-07
6	0.60	1.483239697419	1.483239812147	1.14728e-07
7	0.70	1.549193338483	1.549193450818	1.12335e-07
8	0.80	1.612451549660	1.612451659292	1.09633e-07
9	0.90	1.673320053068	1.673320159914	1.06846e-07
10	1.00	1.732050807569	1.732050911659	1.04090e-07

UIN SUSKA RIAU



## DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis dilahirkan di Minas, pada tanggal 04 Maret 1998, sebagai anak bungsu dari empat bersaudara pasangan Bapak Jasman dan Herma Yuniati. Penulis menyelesaikan Pendidikan formal Sekolah Dasar di SDN 002 Air Molek pada tahun 2010, Sekolah Menengah Pertama Penulis selesaikan di SMPN 1 Pasir Penyu pada tahun 2013 dan menyelesaikan pendidikan Sekolah Menengah Atas dengan Jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA) di SMAN 1 Pasir Penyu pada tahun 2016.

Setelah menyelesaikan SMA, pada tahun yang sama penulis melanjutkan Pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau dan lulus di Fakultas Sains dan Teknologi, Jurusan Matematika. Pada bulan Februari 2019, penulis melaksanakan Kerja Praktek di Balai Pengelolaan Daerah Aliran Sungai dan Hutan Lindung Indragiri Rokan dengan judul **“Pengaruh Luas DAS dan Luas Kawasan Lindung Terhadap Luas Daerah Rawan Longsor di Kabupaten Kampar Menggunakan *Rough-Regresi*”** yang dibimbing oleh Bapak Dr. Riswan Efendi, M.Sc dan diseminarkan pada 4 Juli 2018. Pada bulan Agustus-September 2018 penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kabupaten Indragiri Hulu, Kecamatan Pasir Penyu, Desa Lembah Dusun Gading.

Pada tanggal 19 Desember 2019 penulis dinyatakan lulus dalam ujian sarjana dengan judul tugas akhir **“Modifikasi Metode Runge-Kutta Kuntzmann Berdasarkan Rata-Rata Pangkat  $p = 1/2$ ”** di bawah bimbingan Bapak Wartono, M.Sc.

### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.